@ EPFL

Transmissions par engrenages I

Principes fondamentaux, Roue à développante de cercle

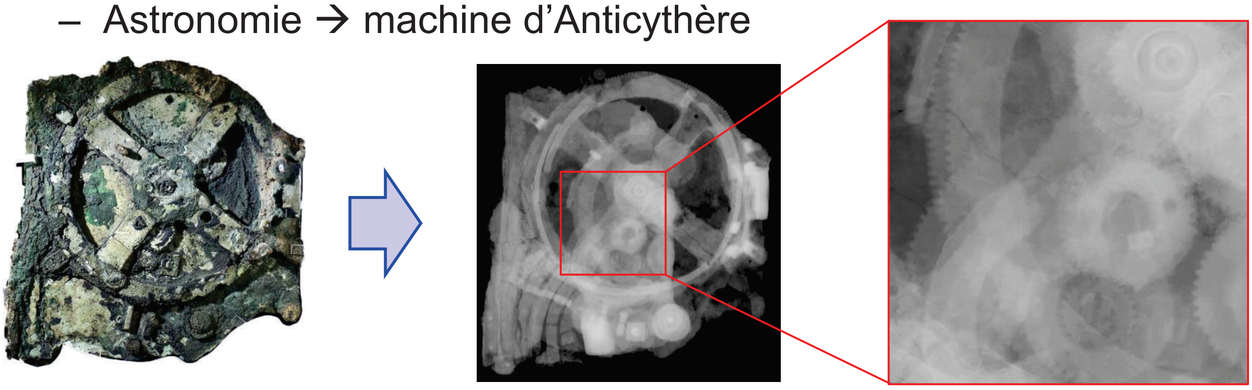
Dr. S. Soubielle

Dans ce cours, nous allons…

- … **Présenter les principes fondamentaux de la transmission par engrenages**
  - … Transmission positive, homocinétique, et continue
  - … Configurations de montage et types de denture
  - … Cas particuliers d'architectures
- … **Tester différentes géométries de contact entre dents**
  - … En vue d'identifier les conditions nécessaires à une transmission positive et homocinétique
- … **Présenter la développante de cercle**
  - … Et montrer comment cette forme de dent permet de satisfaire les conditions de transmission positive et homocinétique

Historique

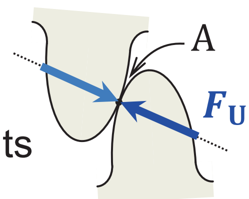
- **Antiquité : 1[ères] utilisations, par les grecs (II[e] av. J.-C.)**
  - Astronomie → machine d'Anticythère



  - Levage de charges lourdes → treuils
- **Moyen-Âge (à partir du Xe s.)**
  - Moulins à eaux et à vent
  - Démultiplication de la force / du moment

Principes fondamentaux

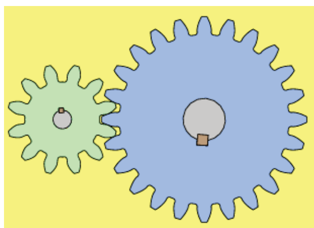
- **Rotation ←→ rotation** $C_E \cdot \omega_E \rightarrow$ **ENGRENAGE** $\rightarrow C_S \cdot \omega_S$
  - Rapport de transmission : $i = \omega_E / \omega_S$
  - Puissance d'entrée : $\dot{W}_E = C_E \cdot \omega_E$
  - Puissance de sortie : $\dot{W}_S = C_S \cdot \omega_S \quad (= \eta \cdot \dot{W}_E)$
  - Roue d'entrée = roue « menante » / de sortie = « menée »
- **Transmission positive (permanente)**
  - Roues équipées de dents sur leur circonférence
  - Contact permanent entre au moins un couple de dents
  - Force utile F_U portée par la normale au contact



- **Transmission homocinétique ($i =$ cte)**

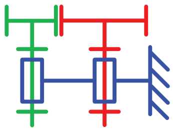
  Permet de convertir la vitesse et le couple

  $$\rightarrow \omega_S = \frac{\omega_E}{i} \quad \text{et} \quad C_S = \frac{\dot{W}_S}{\omega_S} = \frac{\eta \cdot \dot{W}_E}{\omega_S} = \eta \cdot i \cdot C_E$$

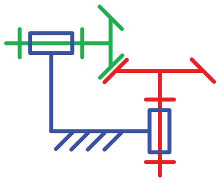


Types d'engrenages (1/2)

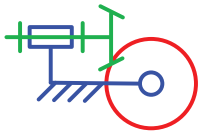
- **Trois configurations d'axes**
  - **Axes parallèles**
    → Engrenages cylindriques



  - **Axes concourants**
    → Engrenages coniques



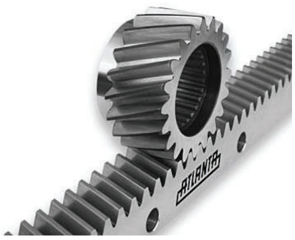
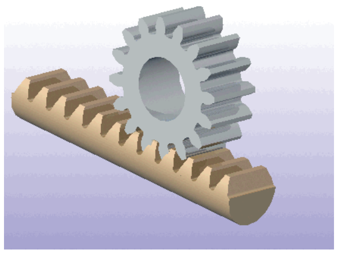
  - **Ni l'un ni l'autre**
    → Engrenages gauches



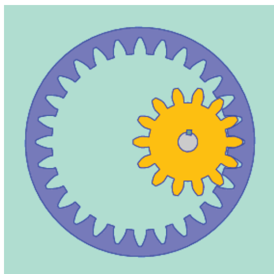

- **Deux types d'orientation de la denture**
  - **Denture droite** → Génératrice concourante avec l'axe de rotation de la roue dentée (point d'intersection repoussé à l'infini sur roue cylindrique)
  - **Denture hélicoïdale (roue cylindrique) / spirale (roue conique)**

Types d'engrenages (2/2)

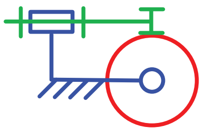
- **Cas particuliers**
  - **Pignon-crémaillère**
    → Engrenage cylindrique avec un diamètre infini pour la roue

  - **Pignon-couronne intérieure**
    → Engrenage cylindrique avec denture intérieure sur la roue

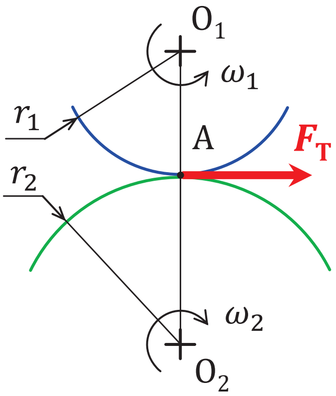



  - **Roue et vis sans fin**
    → Engrenage gauche dans lequel l'axe de rotation de chaque roue dentée est porté par le plan médian de l'autre




Homocinétisme et profil de dent (1/7)

- ## Cas idéal : transmission par adhérence de roues lisses



Transmission sans perte → $\eta = 1$

→ $\dot{W}_1 = \dot{W}_2$

→ $|M_1| \cdot |\omega_1| = |M_2| \cdot |\omega_2|$

Effort tangentiel au contact F_T → $|M_1| = r_1 \cdot F_T$

→ $|M_2| = r_2 \cdot F_T$

Rapport *i* → $|i| = \dfrac{|\omega_1|}{|\omega_2|} = \dfrac{|M_2|}{|M_1|} = \dfrac{r_2}{r_1} = \text{cte}$

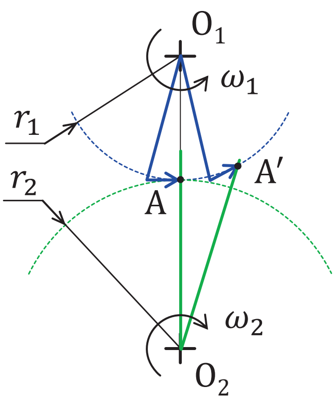
→ La transmission est homocinétique

→ Par contre elle n'est pas positive

- ## Objectifs à atteindre
  - Transmission positive (contact ponctuel)
  - Transmission homocinétique (et permanente)

Homocinétisme et profil de dent (2/7)

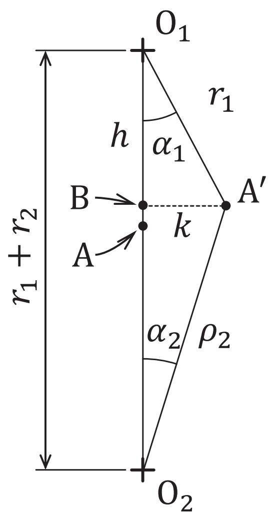
- ## Cas n°1 : appui ponctuel de R1 sur plan radial de R2



→ Contact au point A à $t = 0$ (et $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$)

→ Contact au point A′ à t'

La transmission est homocinétique si le rapport α_1/α_2 est constant en tout temps



Triangle $O_1A'B$ → $h = r_1 \cdot \cos\alpha_1$

→ $k = r_1 \cdot \sin\alpha_1$

Triangle $O_2A'B$

→ $r_1 + r_2 - h = \rho_2 \cdot \cos\alpha_2$

→ $k = \rho_2 \cdot \sin\alpha_2$

$$\Rightarrow \quad \rho_2 = \frac{r_1 + r_2 - h}{\cos\alpha_2} = \frac{r_1 \cdot (1 - \cos\alpha_1) + r_2}{\cos\alpha_2} = r_1 \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

Homocinétisme et profil de dent (3/7)

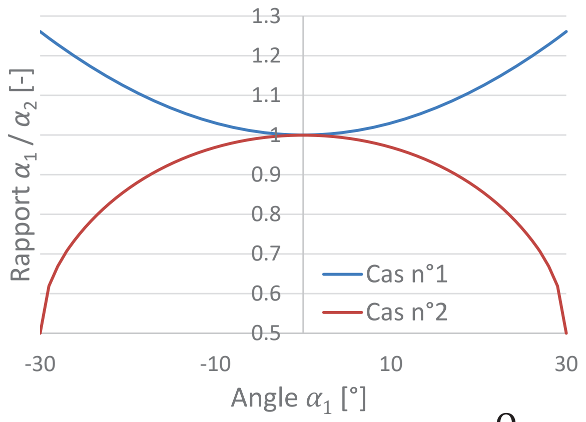
- **Cas n°1 (suite)**

$$\frac{r_1 \cdot (1-\cos\alpha_1) + r_2}{\cos\alpha_2} = r_1 \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

⇨ $$\tan\alpha_2 = \frac{r_1 \cdot \sin\alpha_1}{r_1 \cdot (1-\cos\alpha_1) + r_2}$$

⇨ $$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\arctan\left(\dfrac{r_1 \cdot \sin\alpha_1}{r_1 \cdot (1-\cos\alpha_1) + r_2}\right)}$$

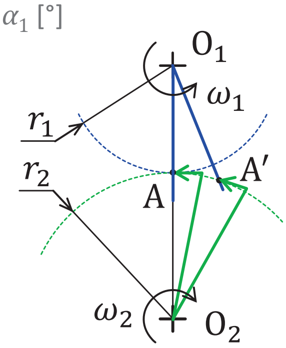
Représentation graphique avec $r_1 = r_2$



→ La transmission n'est pas homocinétique

- **Cas n°2 : appui ponctuel de R2 sur plan radial de R1**

⇨ $$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\arcsin\left(\dfrac{(r_1 + r_2) \cdot \sin\alpha_1}{r_2}\right) - \alpha_1}$$

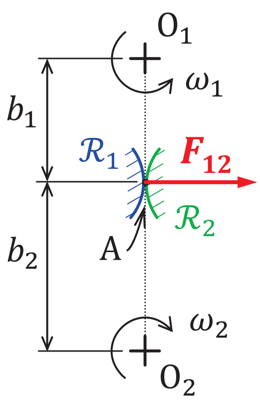


Homocinétisme et profil de dent (4/7)

- **Analyse basée sur la force utile – $F_U \perp O_1O_2$**
  - Transmission positive → la force utile est normale au contact
  - $\eta = 1$ → Pas de perte par frottement → $\mu_0 = \mu = 0$

    → Il n'y a pas de composante tangentielle d'effort

    → $\begin{cases} |M_1| = b_1 \cdot F_{12} \\ |M_2| = b_2 \cdot F_{12} \end{cases}$



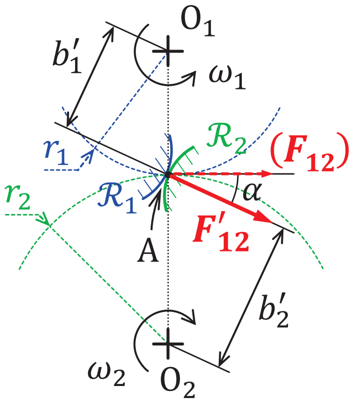
Et $|M_1| \cdot |\omega_1| = |M_2| \cdot |\omega_2| \rightarrow b_1 \cdot F_{12} \cdot \omega_1 = b_2 \cdot F_{12} \cdot \omega_2$

$$\rightarrow |i| = \frac{|\omega_1|}{|\omega_2|} = \frac{b_2}{b_1}$$

⇨ La transmission est homocinétique si le rapport des bras de levier est constant.

Homocinétisme et profil de dent (5/7)

• Analyse basée sur la force utile – $\boldsymbol{F}_{\mathrm{U}}$ inclinée



On suppose $\boldsymbol{F}'_{12}$ inclinée d'un angle $\boldsymbol{\alpha}$

→ Les expressions trouvées restent vérifiées :

$$\begin{cases}|M_1| = b'_1 \cdot F'_{12} \\ |M_2| = b'_2 \cdot F'_{12}\end{cases} \quad |M_1|\cdot|\omega_1| = |M_2|\cdot|\omega_2| \quad |i| = \frac{|\omega_1|}{|\omega_2|} = \frac{b'_2}{b'_1}$$

→ Transmission homocinétique ssi $b'_2/b'_1 = \mathrm{cte}$

Calculons $\overline{\mathbf{O_1A}}$ et $\overline{\boldsymbol{O_2A}}$

$$\begin{cases}\overline{\mathrm{O_1A}} = b'_1/\cos\alpha \\ \overline{\mathrm{O_2A}} = b'_2/\cos\alpha\end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{\mathrm{O_2A}}}{\overline{\mathrm{O_1A}}} = \frac{b'_2}{b'_1} = |i|$$

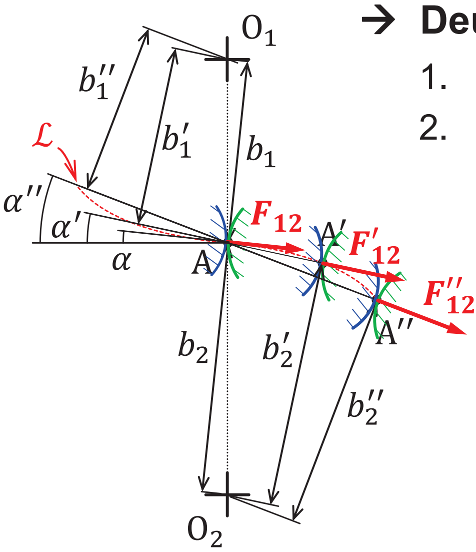
Quelle force $\boldsymbol{F}_{12}$ faudrait-il exercer pour transmettre le même couple $\boldsymbol{C}_1$ avec le bras de levier $\overline{\boldsymbol{O_1A}}$?

$$|M_1| = b'_1 \cdot F'_{12} = \overline{\mathrm{O_1A}} \cdot F_{12}$$

$$\Rightarrow F_{12} = \frac{b'_1 \cdot F'_{12}}{\overline{\mathrm{O_1A}}} = F'_{12}\cdot\cos\alpha$$

Homocinétisme et profil de dent (6/7)

• Transmission continue = contact maintenu sur au moins un couple de dents, en tout temps (1/2)



→ **Deux conditions**

1. Contact le long d'une ligne $\mathcal{L}$ de longueur non nulle
2. Le contact entre deux dents ne peut se rompre que s'il s'est déjà établi entre les deux dents suivantes

Condition n°1 + homocinétisme

→ $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{b'_2}{b'_1} = \dfrac{b''_2}{b''_1} = |i|$

→ Définit la direction de F_{12}, F'_{12}, F''_{12}

→ Définit la normale au contact en A, A', et A''

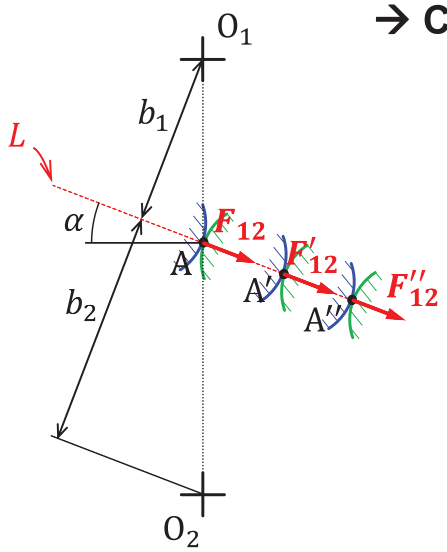
Transmission d'un couple $\boldsymbol{C}_1$ constant

→ $|M_1| = b_1 \cdot F_{12} = b'_1 \cdot F'_{12} = b''_1 \cdot F''_{12}$

On peut remarquer que $F_1 \cdot \cos\alpha = F'_1 \cdot \cos\alpha' = F''_1 \cdot \cos\alpha'' = |M_1|/\,\overline{\mathrm{O_1A}}\ \ (= F_{\mathrm{T}})$

Homocinétisme et profil de dent (7/7)

- **Transmission continue = contact maintenu sur au moins un couple de dents, en tout temps (2/2)**



→ **Cas particulier : L rectiligne**

→ $b_1 = b_1' = b_1''$

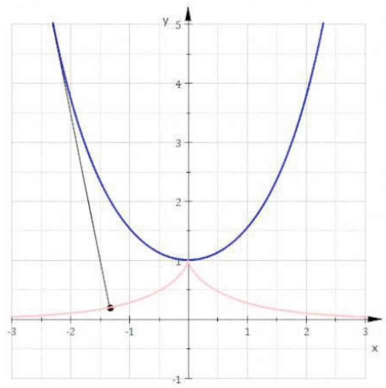
→ $F_{12} = F_{12}' = F_{12}''$ $(= C_1/b_1)$

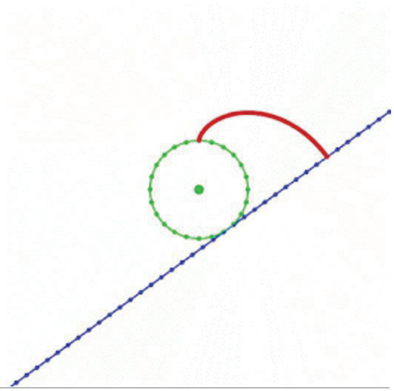
→ Orientation constante de la normale au contact (angle α)

Développante de cercle (1/5)

- **Principe d'une développante**
  - Courbe générée par un point fixe appartenant à une droite qui roule sans glisser sur une courbe de base
  - La droite qui roule sans glisser est appelée « droite génératrice »
- **Développante de cercle**

  → La courbe de base est un cercle, appelé « cercle de base »

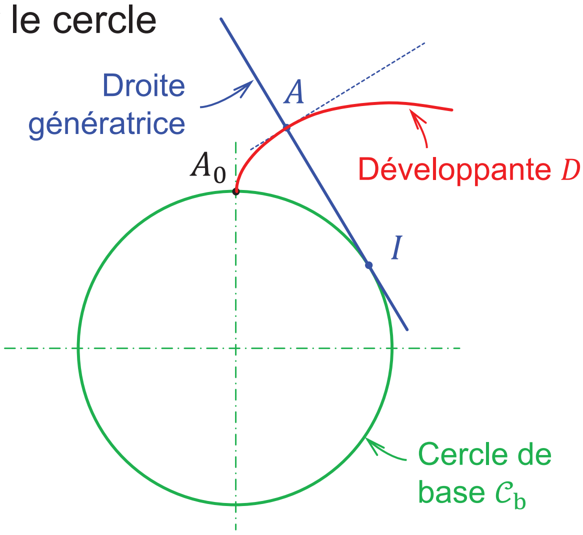




Développante de cercle (2/5)

• Propriétés d'une développante de cercle (1/3)

- I = Centre Instantané de Rotation (CIR) de la droite génératrice sur le cercle
- $\overline{AI}$ = rayon de courbure de la développante au point A
- $\overline{AI} = \widehat{A_0 I}$
- La tangente au profil en développante de cercle
  - → Est ⊥ à la droite AI
  - → Ne coupe jamais D
- La normale à n'importe quelle tangente à la développante est toujours tangente au cercle de base

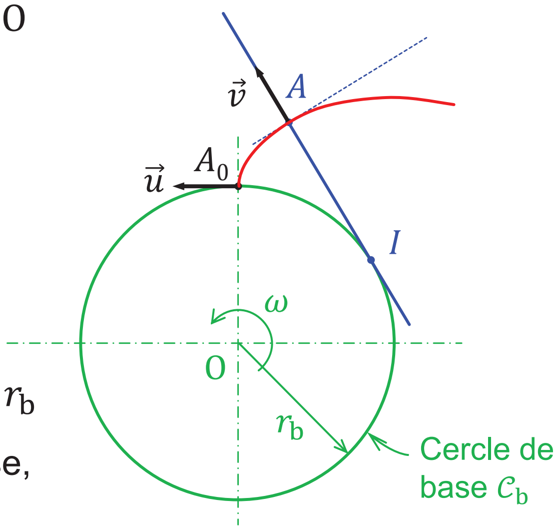


Développante de cercle (3/5)

• Propriétés d'une développante de cercle (2/3)

- Supposons que le cercle de base $\mathcal{C}_\mathrm{b}$ tourne autour de son centre O de telle manière que le CIR I reste immobile
  - → $\vec{u}$ = vitesse circonférentielle du cercle $\mathcal{C}_\mathrm{b}$
  - → $\vec{v}$ = vitesse linéaire de la droite génératrice
- $\overline{AI} = \widehat{A_0 I}$ → $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = |\omega| \cdot r_\mathrm{b}$

  avec r_b le rayon du cercle de base, appelé « rayon de base »



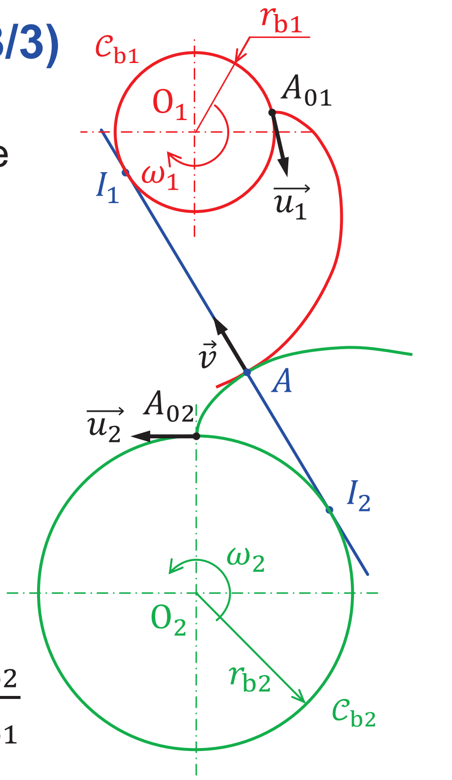
Développante de cercle (4/5)

- **Propriétés d'une dév. de cercle (3/3)**
  - Supposons deux cercles de base $\mathcal{C}_{b1}$ et $\mathcal{C}_{b2}$ munis chacun d'une développante de cercle telle que :
    - La droite génératrice $I_1 I_2$ est commune aux deux développantes
    - Les deux développantes sont en contact au point A
  - Si A se déplace à la vitesse $\vec{v}$, alors :

$$\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{u_1}\| = \|\overrightarrow{u_2}\|$$

  - $\overrightarrow{u_1}$ = vitesse circonférentielle de $\mathcal{C}_{b1}$
  - $\overrightarrow{u_2}$ = vitesse circonférentielle de $\mathcal{C}_{b2}$

Et $\begin{cases} \|\overrightarrow{u_1}\| = r_{b1} \cdot |\omega_1| \\ \|\overrightarrow{u_2}\| = r_{b2} \cdot |\omega_2| \end{cases} \Rightarrow |i| = \dfrac{|\omega_1|}{|\omega_2|} = \dfrac{r_{b2}}{r_{b1}}$



Développante de cercle (5/5)

- **Vitesse de glissement, pôle, cercle primitif**
  - $\overrightarrow{V_{A\in 2/1}}$ est tangente au contact
    → ⊥ à la droite génératrice
  - $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{A\in 2/0}}$ orthoradiales

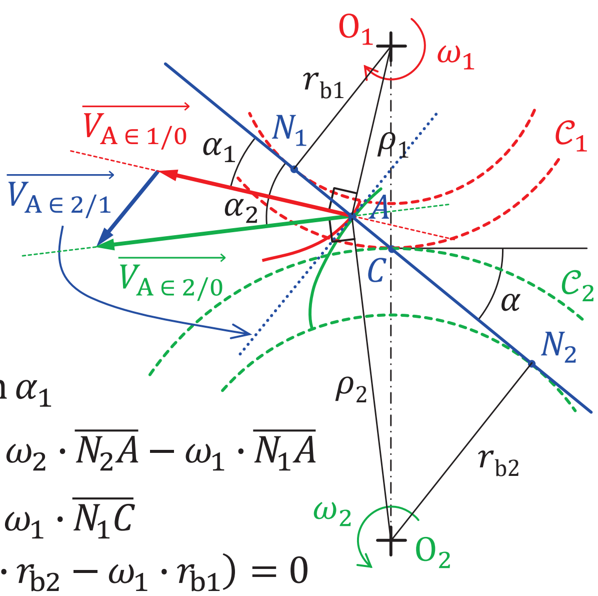
→ $\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/0}} - \overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$

→ $\left|\overrightarrow{V_{A\in 2/1}}\right|$

$= \left|\overrightarrow{V_{A\in 2/0}}\right| \cdot \sin\alpha_2 - \left|\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}\right| \cdot \sin\alpha_1$

$= \omega_2 \cdot \rho_2 \cdot \sin\alpha_2 - \omega_1 \cdot \rho_1 \cdot \sin\alpha_1 = \omega_2 \cdot \overline{N_2 A} - \omega_1 \cdot \overline{N_1 A}$

  - Si $A = C$ → $\left|\overrightarrow{V_{C\in 2/1}}\right| = \omega_2 \cdot \overline{N_2 C} - \omega_1 \cdot \overline{N_1 C}$
    $= \tan\alpha \cdot (\omega_2 \cdot r_{b2} - \omega_1 \cdot r_{b1}) = 0$



→ C est appelé le « pôle » et α « l'angle de pression »

→ $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont appelés les « cercles primitifs »

Des questions ?